Integration par partie

$n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

1) $a_1 =$

2) mq $a_{n+1} = e - (n+1) a_n$ (Integration par partie)

3) $\int_1^e \ln^3 x - 3\ln x \, dx$

$$a_1 = \int_1^e \ln x \, dx$$

$\int \ln x = x \ln x - x$

$\ln e = 1$

$\ln 1 = 0$

$$= \left[x \ln x - x \right]_1^e$$

$$= (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)$$

$$= (e - e) - (-1) = 1$$

$$a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

1) $a_1 =$

2) mq $a_{n+1} = e - (n+1) a_n$ (Integration par partie)

3) $\int_1^e \ln^3 x - 3\ln x \, dx$

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

$$a_{n+1} = \int_1^e \underbrace{1}_{u'(x)} \underbrace{(\ln x)^{n+1}}_{v(x)} \, dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = (n+1)(\ln x)^n \end{cases}$$

$$f(x) = (1 - \ln x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f(x) = (1 - \ln x)^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x}(1 - \ln x)$$

$$f(x) = (1 - \ln x)^3 \Rightarrow f'(x) = 3\left(-\frac{1}{x}\right)(1 - \ln x)^2$$

$$f(x) = \ln^4 x \longrightarrow f'(x) = 4\,\frac{1}{x}\ln^3 x$$

$$\boxed{(f^n)' = n f' f^{n-1}}$$

$$a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

$$a_{n+1} = \int_1^e \underbrace{1}_{u'(x)} \underbrace{(\ln x)^{n+1}}_{v(x)} \, dx = [u v] - \int u v'$$

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x) = \boxed{x} \\ v'(x) = \boxed{(n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n} \end{cases}$$

$$u(x)\,v(x) = x(\ln x)^{n+1}$$

$$u(x)\,v'(x) = (n+1)\ln^n x$$

$$a_{n+1} = \left[x \ln^{n+1} x\right]_1^e - (n+1)\underbrace{\int_1^e \ln^n x \, dx}$$

$$= e\,\underbrace{\ln^{n+1} e}_{1} - 1\,\underbrace{\ln^{n+1} 1} - (n+1)a_n$$

$$= e - (n+1)a_n$$

$$a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

1) $a_1 =$

$$\boxed{a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx}$$

$\boxed{a_1 = 1}$

2) mq $\boxed{a_{n+1} = e - (n+1)\, a_n}$ (Intégration par parties)

3) $\int_1^e \ln^3 x - 3 \ln x \, dx$

$a_2 = e - (1+1)\, a_1 = e - 2 a_1$

$a_3 = e - 3 a_2 = e - 3(e - 2a_1)$

$= e - 3e + 6 = 6 - 2e$

$\int_1^e \ln^3 x - 3 \ln x \, dx$

$= \boxed{\int_1^e \ln^3 x \, dx} - 3 \int_1^e \ln x \, dx$

$= a_3 - 3\, a_1$

$= 6 - 2e - 3$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$$

$$U_1 = 2U_0 + 1 = 3$$

$$\int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\int_0^1 e^{\frac{1}{2}x} \, dx = \left[2e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}\times 0} = 2\sqrt{e} - 1$$

$$\int_0^1 e^{2x} \, dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 e^{\frac{1}{2}x+3} \, dx = 2\left[e^{\frac{1}{2}x+3}\right]$$

4) On pose $I_0 = \int_{-2}^{2} e^{-t}dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_{-2}^{2}(t+2)^n e^{-t}dt$.

a) Montrer que $I_0 = e^2 - \frac{1}{e^2}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{4^{n+1}}{e^2}$.

c) Calculer I_1 et I_2 .

$$I_0 = \int_{-2}^{2} e^{-t}\,dt$$

$$= \left[-e^{-t}\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\left[e^{-2} - e^{2}\right]$$

$$= -e^{-2} + e^2 = e^2 - \frac{1}{e^2}$$

4) On pose $I_0 = \int_{-2}^{2} e^{-t}dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_{-2}^{2}(t+2)^n e^{-t}dt$.

a) Montrer que $I_0 = e^2 - \frac{1}{e^2}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{4^{n+1}}{e^2}$.

c) Calculer I_1 et I_2 .

$$\int_{-2}^{2} (t+2)^{n+1} e^{-t}\,dt = (n+1)\int_{-2}^{2} (t+2)^n e^{-t}\,dt + [\quad]$$

$$\begin{cases} U(t) = \boxed{(t+2)^{n+1}} \\ V'(t) = e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U'(t) = (n+1)(t+2)^n \\ V(t) = \boxed{-e^{-t}} \end{cases}$$

$$I_n = \left[-(t+2)^{n+1} e^{-t}\right]_{-2}^{2} + (n+1)\int_{-2}^{2} (t+2)^n e^{-t}\,dt$$

$$= -4^n e^{-2} + (n+1)\, I_n$$

4) On pose $I_0 = \int_{-2}^{2} e^{-t}dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_{-2}^{2}(t+2)^n e^{-t}dt$.

a) Montrer que $I_0 = e^2 - \frac{1}{e^2}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{4^{n+1}}{e^2}$.

c) Calculer I_1 et I_2 .

$$\int_{-2}^{2} (t+2)^{n+1} e^{-t}\,dt = \boxed{(n+1)} \int_{-2}^{2} (t+2)^n e^{-t}\,dt - \frac{4^{n+1}}{e^2}$$

4) On pose $I_0 = \int_{-2}^{2} e^{-t}dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_{-2}^{2}(t+2)^n e^{-t}dt$.

a) Montrer que $I_0 = e^2 - \frac{1}{e^2}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{4^{n+1}}{e^2}$.

c) Calculer I_1 et I_2 .

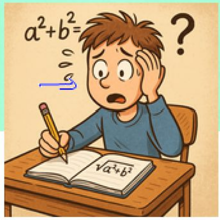
$I_1 = I_0 - \frac{4}{e^2}$ (عوض n بالصفر)

$I_2 = 2I_1 - \frac{4^2}{e^2}$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x}\,dx$ et $v_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+x}}\,dx$.

1. a) Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = \frac{1}{2}$.



$$U_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\int \frac{1}{x}\ln x = \int U' U = \frac{1}{2}U^2$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x}\,dx$ et $v_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+x}}\,dx$.

1. a) Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = \frac{1}{2}$.

b) $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln^2 1 = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\, n^2 \ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \quad \Big| \quad \frac{1}{n} = t, \quad n = \frac{1}{t}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$$

1. On considère la suite (K_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $K_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$.

a) Montrer que $K_1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

b) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, $K_{n+2} + K_n \boxed{= \frac{1}{n+1}}$.

$$1) \; K_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$K_{n+2} + K_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + x^n}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n\left[\cancel{1+x^2}\right]}{\cancel{1+x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \Big[(t+1)\ln(t+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 1\,dt$$

$$\begin{cases} U'(t) = 1 \\ V(t) = \ln(1+t) \end{cases} \qquad \begin{cases} U(t) = \boxed{t+1} \\ V'(t) = \boxed{\dfrac{1}{1+t}} \end{cases}$$